第25卷第8期
2022年8月

软件工程 SOFTWARE ENGINEERING

Vol.25 No.8
Aug. 2022

文章编号：2096-1472(2022)-08-11-04 DOI:10.19644/j.cnki.issn2096-1472.2022.008.003

等几何分析细化收敛性研究

谢宇洋，卜宁远

(上海理工大学机械工程学院，上海 200093)
✉826647688@qq.com; BNY19971997@163.com

摘 要：传统有限元分析软件中，CAE模型和CAD模型的数据不一致会造成计算结果的误差，为避免模型转换造成的分析误差提出等几何分析算法。等几何分析算法基于设计和分析统一模型，实现模型从几何设计到力学仿真的无缝集成。采用NURBS曲线分片方法建立几何模型并实现体参数化表达，使用二分K细化方法对CAD模型处理后，用等几何分析算法进行力学分析。等几何分析算法的计算结果与有限元分析软件结果对比，模型不需要转换和离散且保证了模型边界的光滑，更少的模型数据可以得到精确的结果，同时通过相同节点数和单元数的模型分析，等几何分析计算结果收敛更快。

关键词：有限元；等几何分析；NURBS曲线；K细化
中图分类号：TP391.41 **文献标识码**：A

Research on Convergence of Refinement of Isogeometric Analysis

XIE Yuyang, BU Ningyuan

(*School of Mechanical Engineering*, *University of Shanghai for Science and Technology*, *Shanghai* 200093, *China*)
✉826647688@qq.com; BNY19971997@163.com

Abstract: Data inconsistency between CAE and CAD models in traditional finite element analysis software leads to errors in calculation results. In order to avoid analysis errors caused by model conversion, this paper proposes an isogeometric analysis (IGA) algorithm, which is based on a unified model for design and analysis, and realizes seamless integration of models from geometric design into mechanical simulation. NURBS curve slicing method is used to establish the geometric model and realize the volume parameter expression. After the CAD model is processed by the bipartite K refinement method, the mechanical analysis is carried out by the isogeometric analysis algorithm. Compared with the results of the finite element analysis software, the proposed model does not need to be converted and dispersed, and the model boundary is smooth. Less model data can obtain accurate results. At the same time, Isogeometric analysis results converge faster for the model analysis with the same number of nodes and elements.

Keywords: finite element; isogeometric analysis; NURBS curve; K refinement

1 引言(Introduction)

现阶段各个领域的物理性能研究大多根据有限元分析(FEM)软件仿真计算，如温度、变形和应力等性能。有限元方法在实现分析优化时，CAD数据与CAE数据的相互转换会造成模型数据特征丢失，同时点的离散性会导致优化模型的边界曲线外轮廓无法精确表达。在产品的研发中没有设计方法可满足从设计到分析在同一个模型数据下进行，而等几何方法的提出则满足了CAD模型和CAE模型的统一表达和计算。

等几何分析(IGA)是HUGHES等人[1]基于等参单元思想提出的分析方法，它提供了计算的可能性，将分析方法集成到计算机辅助设计(CAD)工具中。等几何模型都是由非均匀有理B样条(NURBS)参数化表示的，其几何模型与分析模型不需要转化，避免了模型数据转换误差，其好处是从设计到分析所花费的时间减少，从而节省了工业生产中的时间成本。在等几何分析中，CAD和CAE的紧密耦合需要这两个领域的知识，即计算几何和计算力学，可以解决有限元优化中边界运动所导致的模型边界不规则、网格扭曲等问题[2−3]，目前已应用于板壳分析[4]、流体力学[5]、接触分析[6]、优化设计[7]、电磁场[8]等。

本文介绍了等几何分析的理论，使用体参数化造型方法

生成三维几何模型。最后，通过与有限元方法的变形和应力分布等分析结果对比验证等几何分析算法的正确性，以及计算结果的收敛性差异。

2 几何模型构建(Geometric modeling)

2.1 NURBS曲面

NURBS曲面的定义：

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}} \tag{1}$$

其中，$P_{i,j}$分别代表两个方向上的控制点坐标，$w_{i,j}$是权重，$N_{i,p}(u)$、$N_{j,q}(v)$分别为定义在节点矢量u、v上的NURBS基函数。

2.2 多片分析模型

2.2.1 NURBS实体

同理，NURBS实体表达式定义为：

$$V(u,v,w)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)N_{k,r}(w)w_{i,j,k}P_{i,j,k}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)N_{k,r}(w)w_{i,j,k}} \tag{2}$$

各参数所代表的含义同NURBS曲面定义的参数[9]。

NURBS实体基函数表达式为：

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(u,v,w)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)N_{k,r}(w)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^{n}\sum_{\hat{j}=0}^{m}\sum_{\hat{k}=0}^{l}N_{\hat{i},p}(u)N_{\hat{j},q}(v)N_{\hat{k},r}(w)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \tag{3}$$

2.2.2 模型细化

节点插入考虑的是插入单个节点的问题，尽管可以多次插入该节点。然而在实际应用中需要一次插入多个节点，节点细化可以通过多次应用节点插入算法来实现，可以用来得到曲面的多面体逼近。加细节点矢量将使控制多边形网格更加逼近曲面，节点矢量无限加细时，控制多边形网格收敛于曲面。如图1所示，控制点更加逼近圆筒曲面。图1(a)是一个实例，阶次选择为$p=2$，$q=2$，$r=2$；三个方向的控制点数目为：$n=3$，$m=3$，$l=3$，节点矢量为：$u=[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]$，$v=[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]$，$w=[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]$。同时在u、v、w三个方向使用二分K细化方法得到曲面，图1(b)细化一次后的节点矢量为$u=[0\ 0\ 0\ 0.5\ 1\ 1\ 1]$，图1(c)细化两次后的节点矢量为$u=[0\ 0\ 0\ 0.25\ 0.5\ 0.25\ 1\ 1\ 1]$。

(a)初始模型 (b)细化一次 (c)细化两次

图1 圆筒几何模型图

Fig.1 Cylinder geometry model diagram

3 等几何分析理论(Theory of isogeometric analysis)

3.1 等参思想

在CAD中，实体实际上只是边界的表面，而不是内部的建模，而在FEM中是一个三维实体，因此从CAD实体到FEM实体的过渡需要一个CAD的步骤边界表示法转化为有限元实体表示法。在实际应用中，很多情况下几何模型比较复杂，此时选用曲边单元代替直边单元来进行几何域的逼近。为了积分求解的简便，要在规整单元域中进行，必须在规整单元域和曲边单元域之间建立参数映射，称之为参数域和物理域之间的参数变换，即为等参变换，单元为等参单元[10]。

在等几何分析中，需要用到两级映射，第一是母单元到参数空间映射，第二是参数空间到物理域映射。

在等几何分析方法中也用到了传统有限元分析方法中的等参有限单元法。以四边形单元为例，假设参数空间中的六面体单元有六个边界为$[-1,1]$，由母单元到参数域的映射变换推导如下。

母单元到参数空间映射公式：

$$\begin{cases} u=u_i+(\tilde{u}+1)\dfrac{u_{i+1}-u_i}{2}=\dfrac{(u_{i+1}-u_i)\tilde{u}+(u_{i+1}+u_i)}{2} \\ v=v_i+(\tilde{v}+1)\dfrac{v_{i+1}-v_i}{2}=\dfrac{(v_{i+1}-v_i)\tilde{v}+(v_{i+1}+v_i)}{2} \\ w=w_i+(\tilde{w}+1)\dfrac{w_{i+1}-w_i}{2}=\dfrac{(w_{i+1}-w_i)\tilde{w}+(w_{i+1}+w_i)}{2} \end{cases} \tag{4}$$

其中，$\tilde{u}$、$\tilde{v}$、$\tilde{w}$表示高斯点，采用高斯求积计算。

参数空间到物理域映射公式：

$$J_1=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\left|J_2\right|=\frac{1}{8}(u_{i+1}-u_i)(v_{i+1}-v_i)(w_{i+1}-w_i) \tag{6}$$

雅可比矩阵行列式公式：

$$\left|J\right|=\left|J_1\right|\left|J_2\right| \tag{7}$$

3.2 线弹性力学分析

基于等几何分析算法的力学分析原理和过程与等参有限元分析方法类似，不同的是用控制点$\{P\}$代替有限元中的单元节点，用NURBS基函数代替模型形函数。仅针对三维线弹性问题，在求解域Ω上，离散控制方程和应力位移边界条件分别为：

$$\nabla\cdot\sigma+b=0 \quad \text{in}\,\Omega$$

$$n\cdot\sigma=\bar{t} \quad \text{on}\,\Gamma^d$$

$$u=\bar{u} \qquad \text{on}\,\Gamma^s$$

式中，σ为应力张量，b为体积力，$\bar{t}$为应力边界面力矢量，$\bar{u}$为位移边界的给定位移。应用最小势能原理[11-12]得平衡方程：

$$F=\boldsymbol{K}d \tag{8}$$

式中，左端F为等效力，$\boldsymbol{K}$为刚度矩阵，d为控制点位移。其中，在等几何分析中的单元刚度K_e和$\boldsymbol{B}$矩阵的表达式为：

$$[\boldsymbol{K}]_e=\int_{V^e}\underset{(m\cdot n\cdot l\times 6)}{[\boldsymbol{B}]^T}\underset{(6\times 6)}{[\boldsymbol{D}]}\underset{(6\times m\cdot n\cdot l)}{[\boldsymbol{B}]}\,dV \tag{9}$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}
\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}x} & & & & & & & \\
 & \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}y} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}y} & & & & & & \\
 & & \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}z} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}z} & & & & & \\
\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}y} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}y} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}z} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}z} \\
\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}z} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}x} & \cdots & \frac{\mathrm{d}R_{ne}}{\mathrm{d}x}
\end{bmatrix} \tag{10}
$$

3.3 等几何分析流程

(1)针对复杂几何模型无法直接进行整体网格划分的特点，采用剪裁操作或划分子域。

(2)在各个子域内进行体参数化处理。利用NURBS建模技术，通过表面控制点的体参数化得到内部控制点，然后根据网格评判标准对控制点网格进行优化，最后得到可用于分析的控制点网格模型。

(3)选择合适的网格细分策略进行模型网格细分操作，以提高分析的结果精度，可以对关键受力点进行局部细分操作。

(4)进行单元刚度矩阵的列式求解，选用合适的高斯积分点，引入等参概念，将位移、应力等要求解的未知量表示为与几何模型相同的基函数表达形式。

(5)根据FEM中对号入座装配原则，将单元刚度矩阵组装成总体刚度矩阵。

(6)将实际载荷与约束进行等效，转移到控制点上，对总体刚度矩阵形成的方程组进行求解，然后求出控制点位移的值，进而求出其他未知变量的值。

(7)分析完成后，显示各种结果云图，并进行相应后处理。

等几何分析流程图如图2所示。

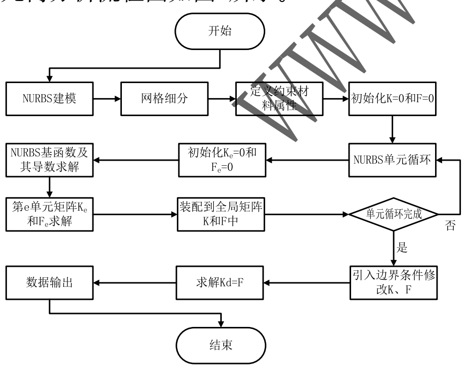


图2 等几何分析流程图

Fig.2 Flow chart of IGA

4 数值结果对比(Comparison of numerical results)

接下来根据前述等几何分析理论，通过编程实现结构的静力学分析，以证明该方法的正确性。梁结构在工程中应用广泛，在机械、土木行业的大规模承载结构和电子元件等微结构设计中发挥着重要作用。梁结构采用有限元方法进行仿真分析时，需要将几何模型剖分为网格模型，对曲梁结构采用以直代曲的方式生成有限元模型，这个过程中引入了几何误差，用等几何分析方法保证边界曲面模型精度，对其进行仿真提高计算精度。在下述算例中，变量均采用国际单位制，长度的单位采用m，力的单位采用N，应力和弹性模量的单位采用Pa。梁模型尺寸如图3所示，梁左侧边完全固定，右侧施加力44,480 N。模型的材料属性杨氏模量和泊松比分别设为2.1018E10 Pa和0.3。

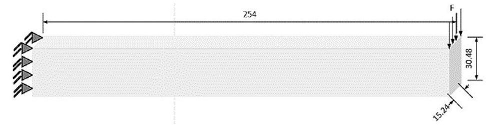
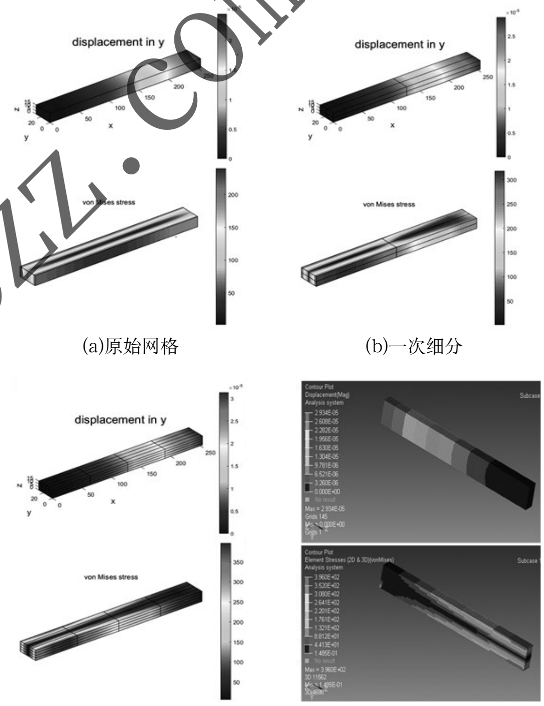


图3 梁模型边界示意图

Fig.3 Boundary diagram of beam model

等几何分析结果图如图4(a)所示，K细化两次后的结果如图4(c)所示，在相同材料属性和约束载荷的工况下有限元分析结果如图4(d)所示。基于等几何分析的三维悬臂梁算例与有限元结果对比，从位移对和应力对比的结果看出分布基本一致。



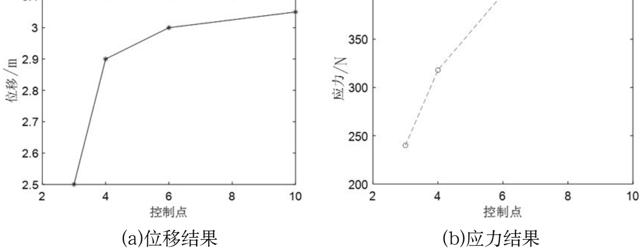
(a)原始网格 (b)一次细分

(c)二次细分 (d)FEM分析结果

图4 梁分析结果

Fig.4 Beam analysis results

分析位移收敛曲线如图5(a)所示，应力收敛曲线如图5(b)所示，等几何分析使用更少的单元数细化两次结果收敛。



(a)位移结果 (b)应力结果

图5 梁细化收敛曲线

Fig.5 The refined convergence curve of the beam

根据表1的数据显示，IGA算法分析结果和FEM分析软件对比结果误差很小，其中位移误差为3.8%，应力误差为0.25%，仅使用单片几何模型结果已接近真值，使用多片模型分析时其收敛速度更快。这验证了三维等几何分析算法的正确性，使用等几何分析算法保证了模型的高阶连续，提高了边界的精度，且不需要划分很多网格。根据表2中IGA和FEM的节点数与单元数大小可以看出，有限元分析的刚度矩阵明显比等几何分析的刚度矩阵规模大，计算量更加烦琐，因此等几何分析的计算效率高。

表1 数值精度误差

Tab.1 Numerical accuracy error

结果对比	位移×10^{-5}/m	应力/N
IGA算法	2.934	396
FEM算法	3.051	397

表2 结果细化收敛对比

Tab.2 Comparison of results refinement convergence

结果对比	节点数/个	单元数/个	位移×10^{-5}/m	应力/N
IGA算法	27	1	2.51	240
	64	1	2.90	318
	216	1	2.93	396
FEM算法	16,900	2,549	3.05	397

5 结论(Conclusion)

等几何分析采用描述几何形状的NURBS函数作为基函数，具有几何精确特性，且离散的几何形状不随单元的稀疏而改变，这意味着即使是比较稀疏的网格划分，也能精确描述研究对象的几何形状，具有很高的数值精度。NURBS本身就具有网格，一个NURBS实体包含若干个NURBS单元，分析时这些单元成为精确描述几何形状的实体单元。NURBS单元也可以细分，基函数的次数也可提高，保证了模型的光滑，计算结果更加精确。等几何分析在设计分析优化中也具有很大的优势，使用NURBS曲线来拟合模型外轮廓以保证边界精度，将控制点坐标作为设计变量进行迭代优化，完成形状优化，有效减少优化中设计变量的数目来提高优化效率。在优化后采用等几何分析算法分析体参数化后的三维模型，避免模型数据转化，提高力学分析的计算效率和精度。

等几何分析同时存在一定的局限性，一方面，对模型单元的剖分以及模型质量要求高，一些不规则图形如点阵材料等还无法通过简单的扫描、拉伸、旋转、放样等体参数化映射方法得到，一些细微的特征如倒角、圆角和小孔等也无法完全保留；另一方面，使用直接和迭代线性代数方程解算器直接解算，对于剖面结构及壳结构通常比迭代的对角预处理共轭梯度解算更有效。但是对于NURBS实体来说，为保证收敛，细化模型多次后虽然网格精细，却无法直接用求解器计算，因为超出内存，元素的长宽比非常大，求解的方程数量也大。研究等几何分析后续需要对数值计算算法进行更深入的研究，保证在提高精度的同时计算速度快。

参考文献(References)

[1] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39):4135-4195.

[2] LU J. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(5):726-741.

[3] TEMIZER I, WRIGGERS P, HUGHES T J R. Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 209:115-128.

[4] BENSON D J, BAZILEVS Y, HSU M C, et al. Isogeometric shell analysis: The reissner-mindlin shell[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(5):276-289.

[5] HSU M C, AKKERMAN I, BAZILEVS Y. High-performance computing of wind turbine aerodynamics using isogeometric analysis[J]. Computers and Fluids, 2011, 49(1):93-100.

[6] 陈龙,郝婵娟.单齿啮合的齿轮接触等几何分析[J].机械工程学报.2021,57(3):107-115.

[7] WALL W A, FRENZEL M A, CYRON C. Isogeometric structural shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(33):2796-2988.

[8] BUFFA A, SANGALLI G, VAZQUEZ R. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(17):1143-1152.

[9] PIEGL L, TILLER W. The NURBS book (monographs in visual communication)[M]. New York: Springer-Verlag, 1997:27-48.

[10] MARTIN T, COHEN E, KIRBY R M. Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 26(6):648-664.

[11] 徐芝纶.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,2002:78-79.

[12] 曾攀.有限元基础教程[M].北京:高等教育出版社,2012:187-190.

作者简介：

谢宇洋(1996-)，男，硕士生.研究领域：CAD/CAE，等几何分析.

卜宁远(1997-)，男，硕士生.研究领域：CAD/CAE.